ANALISIS PERBANDINGAN METODE NUMERIK DALAM MENYELESAIKAN PERSAMAAN-PERSAMAAN SERENTAK

Fransiskus Gatot Iman Santoso
Program Studi Pendidikan Matematika FKIP
Universitas Widya Mandala Madiun

ABSTRACT

One of the uses of numerical method is to determine the values of variables of equations simultaneously. The methods which can be used to determine the values of variables of simultaneous equations are Newton-Rapshon method and iteration method. Between these methods there exist different operating procedures. The problem is which is better or more efficient of the two methods in determining the values of variables of the equations simultaneously. This study aimed to compare the solution with the numerical method in determining the approach to the values of variables of equations simultaneously. Based on the average iteration, Newton-Rapshon method had an average recurrence smaller than the average iteration on the method of iteration, so the method of Newton-Rapshon was better or more efficient in solving the approach to the values of variables of simultaneous equations.

Key words: comparison, Newton-Rapshon method, iteration method, simultaneous equations

A. Pendahuluan

1. Latar Belakang Penelitian

Salah satu masalah dalam matematika adalah menentukan nilai-nilai dari suatu persamaan-persamaan serentak. Nilai suatu persamaan ini adalah nilai yang apabila disubstitusikan ke dalam persamaan memenuhi persamaan tersebut. Nilai-nilai suatu persamaan ditentukan untuk mengetahui atau menentukan titik potong dari persamaan-persamaan serentak ini.

Persamaan-persamaan serentak yang sederhana, yakni yang berbentuk dua atau lebih persamaan dengan dua atau lebih variabel yang berderajat satu dapat ditentukan nilai-nilainya dengan menggunakan cara substitusi, eliminasi, matriks, atau determinan. Namun, jika persamaan-persamaan serentak yang mempunyai variabel berderajat lebih dari satu atau memuat bentuk eksponensial, logaritma, atau trigonometri, maka bentuk penyelesaian dengan cara substitusi, eliminasi, matriks, atau determinan akan mengalami kesulitan atau kesukaran dalam menentukan nilai-nilai dari variabelnya. Untuk itu perlu suatu bentuk penyelesaian lain untuk menentukan nilai-nilai dari variabelnya, yakni dengan menggunakan metode numerik.

Metode numerik adalah metode yang digunakan untuk mencari penyelesaian numerik dari suatu model matematis dan digunakan apabila dengan metode analitik, penyelesaiannya sulit ditentukan dan memerlukan waktu yang cukup lama. Di dalam metode numerik ini dilakukan perhitungan yang berulang-ulang untuk menyelesaikan numeriknya. Penyelesaian numerik ditentukan dengan melakukan prosedur perulangan tertentu, sehingga setiap hasil akan lebih teliti dari perkiraan sebelumnya. Dengan melakukan prosedur perulangan yang cukup, akhirnya diperoleh hasil perkiraan yang mendekati hasil eksak. Maka dari itu, metode numerik dapat disebut sebagai metode aproksimasi atau metode pendekatan. Karena nilai-nilai dari variabelnya merupakan nilai pendekatan ke nilai eksaknya, maka nilai persamaannya juga mendekati ke nilai persamaan eksaknya. Nilai eksak tersebut hanya dapat diketahui, apabila suatu persamaan bisa diselesaikan secara analitis. Dalam metode numerik, biasanya nilai tersebut tidak diketahui. Banyak metode dalam metode numerik yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan matematika, salah satunya untuk menentukan nilai-nilai variabel dari persamaan-persamaan serentak, di antaranya metode

Newton Raphson dan metode Iterasi. Setiap metode ini memiliki prosedur yang berbeda dalam menentukan nilai-nilai variabel dari persamaan-persamaan serentak.

2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang penelitian di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah "Bagaimana perbandingan penyelesaian dengan metode numerik dalam menentukan pendekatan nilai-nilai variabel dari persamaan-persamaan serentak?"

3. Batasan Masalah

Agar dalam pembahasan lebih terarah, maka diperlukan batasan masalah dalam penelitian ini. Adapun batasan masalah penelitiannya adalah:

a. Metode numerik yang dibandingkan adalah metode Newton Raphson dan metode Iterasi.

b. Persamaan-persamaan serentak yang dicari penyelesaiannya adalah persamaan-persamaan serentak yang memuat variabel berderajat dua atau lebih, eksponensial, logaritma, atau trigonometri.

c. Metode numerik yang paling baik atau paling efisien adalah metode yang memiliki rata-rata perulangan terkecil dalam menentukan pendekatan nilai-nilai variabel dari persamaan-persamaan serentak.

4. Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang dikemukakan di atas, maka tujuan yang ingin dicapai penelitian ini adalah untuk mengetahui perbandingan penyelesaian dengan metode numerik dalam menentukan pendekatan nilai-nilai variabel dari persamaan-persamaan serentak.

5. Manfaat Penelitian

Manfaat yang dapat diambil dalam penelitian ini adalah sebagai masukan dalam menentukan metode numerik yang paling baik atau paling efisien dalam menentukan pendekatan nilai-nilai variabel dari persamaan-persamaan serentak.

B. Tinjauan Pustaka

1. Pengertian Metode Numerik

Metode Numerik merupakan salah satu cabang atau bidang ilmu matematika. Metode numerik adalah teknik untuk menyelesaikan permasalahan-permasalahan yang diformulasikan secara matematis dengan cara operasi hitungan (Triatmodjo, 1992:1). Pada dasarnya metode numerik merupakan metode untuk menentukan penyelesaian numeris, dalam hal ini nilai pendekatan real dari suatu model matematis. Di dalam metode numerik ini dilakukan operasi hitungan yang berulang-ulang untuk menyelesaikan penyelesaian numeriknya. Penyelesaian numerik ditentukan dengan melakukan prosedur perulangan (iterasi) tertentu, sehingga setiap hasil akan lebih teliti dari perkiraan sebelumnya. Dengan melakukan prosedur perulangan yang dianggap cukup akhirnya diperoleh hasil perkiraan yang mendekati nilai eksak. Nilai eksak tersebut hanya dapat diketahui apabila suatu fungsi $f(x)$ bisa diselesaikan secara analitis.

Pada umumnya metode numerik tidak mengutamakan diperolehnya nilai yang eksak (tepat), tetapi mengusahakan perumusan metode yang menghasilkan nilai pendekatan yang berbeda dari nilai yang eksak sebesar suatu nilai yang dapat diterima berdasarkan pertimbangan praktis, tetapi cukup dapat memberikan penghayatan pada persoalan yang dihadapi. Banyak metode dalam metode numerik yang dapat digunakan untuk menyelesaikan suatu persamaan metematika. Setiap metode memiliki prosedur yang berbeda dalam menentukan nilai pendekatannya.

2. Kesalahan (*Error*)

Penyelesaian secara numeris suatu persamaan matematika hanya memberikan nilai perkiraan yang mendekati nilai eksak (tepat) dari penyelesaian analitis. Berarti dalam penyelesaian numerik tersebut terdapat kesalahan terhadap nilai eksak. Kesalahan terhadap nilai eksak dibedakan menjadi dua, yaitu kesalahan dasar, dan kesalahan absolut dan relatif.

Kesalahan dasar merupakan kesalahan yang paling dasar dalam perhitungan numerik yang tidak dapat dipisahkan. Ada 3 macam kesalahan dasar dalam perhitungan numerik, yaitu kesalahan bawaan (inheren), kesalahan pembulatan, dan kesalahan pemotongan (Djojodihardjo, 2000:16)

Kesalahan absolut suatu bilangan adalah selisih antara nilai eksak (dengan anggapan telah diketahui) dengan suatu pendekatan pada nilai eksak. Kesalahan absolut tidak menunjukkan besarnya tingkat kesalahan, tetapi besarnya tingkat kesalahan dapat dinyatakan dalam bentuk kesalahan relatif (Triatmodjo, 1992:3). Kesalahan relatif adalah kesalahan absolut dibagi nilai eksaknya. Nilai eksak tersebut hanya dapat diketahui apabila suatu fungsi bisa diselesaikan secara analitik. Dalam metode numerik, nilai eksak tidak dapat diketahui. Untuk itu kesalahan dinyatakan berdasarkan pada nilai pendekatan terbaik dari nilai eksak, sehingga kesalahan mempunyai bentuk sebagai berikut : $\varepsilon_a = \dfrac{\varepsilon}{p*} \times 100\%$ (1)

dengan ε adalah kesalahan terhadap nilai terbaik dan p* adalah nilai perkiraan terbaik Indeks a menunjukkan bahwa kesalahan dibandingkan terhadap nilai perkiraan.

Di dalam metode numerik, sering dilakukan pendekatan secara berulang-ulang. Pada pendekatan tersebut perkiraan sekarang dibuat berdasarkan perkiraan sebelumnya. Dalam hal ini, kesalahan adalah perbedaan antara perkiraan sebelumnya dan perkiraan sekarang, dan kesalahan relatif diberikan dalam bentuk, sebagai berikut: $\varepsilon_a = \dfrac{p*^{n+1} - p*^{n}}{p*^{n+1}} \times 100\%$ (2)

dengan $p*^n$ adalah nilai perkiraan pada perulangan ke-n dan $p*^{n+1}$ adalah nilai perkiraan pada perulangan ke-n+1 (Triatmodjo, 1992:4).

3. Metode Newton-Raphson untuk Persamaan-Persamaan Serentak

Pandang dua persamaan dengan dua variabel : $\begin{cases} F(x,y) = 0 \\ G(x,y) = 0 \end{cases}$ (3)

Jika x_0 dan y_0 merupakan nilai pendekatan dari sepasang skor-skor dan h, k adalah koreksi-koreksinya, sehingga : $\begin{cases} x = x_0 + h \\ y = y_0 + k \end{cases}$

maka persamaan (3) menjadi : $\begin{cases} F(x_0 + h\,,\, y_0 + k) = 0 & (4) \\ G(x_0 + h\,,\, y_0 + k) = 0 & (5) \end{cases}$

Jika persamaan (4) dan (5) diekspansikan dengan teorema Taylor untuk fungsi dengan dua variabel, diperoleh :

$$F(x_0+h, y_0+k) = F(x_0, y_0) + h\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 + k\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 + \ldots = 0 \qquad (6)$$

$$G(x_0+h, y_0+k) = G(x_0, y_0) + h\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_0 + k\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)_0 + \ldots = 0 \qquad (7)$$

Karena h dan k nilai yang relatif kecil, maka bentuk pangkat yang mengenai h dan k dari pangkat 2 (kuadrat), x sampai pangkat paling tinggi darinya dihapus, sehingga persamaan (6) dan (7) menjadi bentuk yang sederhana, sebagai berikut

$$F(x_0, y_0) + h\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 + k\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 = 0 \ \text{dan}\ G(x_0, y_0) + h\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_0 + k\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)_0 = 0$$

Dengan aturan Cramer diperoleh nilai h dan k, sebagai berikut :

Koreksi pertama h_1 dan k_1 adalah :

$$h_1 = \frac{\begin{vmatrix} -F(x_0, y_0) & \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 \\ -G(x_0, y_0) & \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 & \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_0 & \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)_0 \end{vmatrix}} \ \text{dan}\ k_1 = \frac{\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 & -F(x_0, y_0) \\ \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_0 & -G(x_0, y_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 & \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_0 & \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)_0 \end{vmatrix}} \qquad (8)$$

Sehingga dapat diperoleh nilai x dan y baru, yaitu : $\begin{cases} x_1 = x_0 + h_1 & (9) \\ y_1 = y_0 + k_1 & (10) \end{cases}$

Koreksi tambahan dapat diperoleh dengan menggunakan rumus-rumus ini berulang-ulang dan mencari nilai-nilai yang terbaik dari x dan y dengan mensubstitusikan hasil h dan k di setiap langkah (Soehardjo, 1985:30).

4. Metode Iterasi untuk Persamaan-Persamaan Serentak

Pandang dua persamaan dengan dua variabel : $\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$ (11)

Persamaan (11) dapat diubah dalam bentuk : $\begin{cases} x = F_1(x, y) \\ y = F_2(x, y) \end{cases}$ (12)

Jika x_0 dan y_0 nilai pendekatan dari sepasang penyelesaian, maka untuk mendapatkan nilai-nilai yang diperbaiki dilakukan, sebagai berikut:

Pendekatan Pertama : $\begin{cases} x_1 = F_1(x_0, y_0) \\ y_1 = F_2(x_1, y_0) \end{cases}$

Pendekatan Kedua : $\begin{cases} x_2 = F_1(x_1, y_1) \\ y_2 = F_2(x_2, y_1) \end{cases}$

Pendekatan Ketiga : $\begin{cases} x_3 = F_1(x_2, y_2) \\ y_3 = F_2(x_3, y_2) \end{cases}$

dan seterusnya pendekatan ini dilakukan sampai dengan nilai-nilai x dan y diperoleh : $x_{n+1} = x_n$ dan $y_{n+1} = y_n$ (Soehardjo, 1985:33)

C. Metode Penelitian

1. Rancangan Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian kajian pustaka dan penelitian komparasi. Penelitian kajian pustaka adalah penelitian tentang telaah yang dilaksanakan untuk memecahkan suatu masalah yang pada dasarnya bertumpu pada penelaahan kritis dan mendalam terhadap bahan-bahan yang relevan (Tim Penyusun Pedoman Penulisan Karya Ilmiah IKIP Malang, 1996:2). Sedangkan penelitian komparasi merupakan penelitian yang dilakukan untuk menemukan persamaan-persamaan dan perbedaan-perbedaan tentang benda-benda, orang, prosedur kerja, ide-ide, kritik terhadap orang, kelompok, terhadap suatu ide atau prosedur kerja. Dapat juga membandingkan kesamaan pandangan dan perubahan-perubahan pandangan terhadap suatu kasus, peristiwa atau ide-ide (Arikunto, 1989:197). Dalam penelitian ini dibandingkan metode Newton-Raphson dan metode Iterasi dalam menyelesaikan persamaan-persamaan serentak.

Penelitian ini juga termasuk penelitian deskriptif. Penelitian deskriptif adalah penelitian yang berusaha untuk menuturkan pemecahan masalah berdasarkan data-data. Jadi, penelitian ini juga menyajikan data, menganalisis dana menginterprestasikan (Narbuko, 1999:44). Dalam hal ini, data-datanya adalah permasalahan persamaan-persamaan serentak. Dari persamaan-persamaan serentak tersebut diselesaikan dengan metode numerik untuk menentukan nilai pendekatan dari masing-masing variabel. Kemudian baru ditentukan metode yang terbaik dalam menyelesaikan pendekatan nilai-nilai variabel dari persamaan-persamaan serentak tersebut.

2. Langkah Penelitian

Langkah yang dilakukan peneliti untuk melakukan penelitian :

a. Pengkajian terhadap soal persamaan-persamaan serentak, bahwa soal-soal tidak bisa atau sulit diselesaikan secara analitis.
b. Soal persamaan-persamaan serentak yang tidak bisa atau sulit diselesaikan secara analitis, kemudian diselesaikan dengan metode numerik, yaitu dengan metode Newton-Raphson dan metode Iterasi.

c. Penyelesaian pendekatan nilai-nilai variabel dari persamaan-persamaan serentak dengan pemrograman. Langkah yang dilakukan dalam bahasa pemrograman:

   1) Pembuatan diagram alur, yaitu suatu rangkaian prosedur yang biasanya tersusun dalam blok yang logis. Rangkaian prosedur tersebut harus diikuti oleh komputer dalam bahasa pemrograman.

   2) Mengubah prosedur-prosedur dalam diagram alur tersebut menjadi serangkaian instruksi mesin dalam bahasa pemrograman. Dalam hal ini, dalam bahasa mesin, yaitu bahasa pemrograman Pascal.

d. Dari penyelesaian pendekatan nilai-nilai variabel dari persamaan-persamaan serentak dengan bahasa pemrograman Pascal tersebut dipilih penghitungan (metode) yang efesien, yaitu yang memerlukan perulangan penghitungan sependek mungkin. Jadi, tujuan penghitungan adalah untuk memperoleh penghayatan masalah persamaan-persamaan serentak secara tepat dan cepat.

3. Proses Pengambilan Data

Data penelitian diambil dari bermacam-macam permasalahan persamaan-persamaan serentak. Dari bermacam-macam permasalahan persamaan-persamaan serentak tersebut, peneliti mengelompokkan menjadi empat kelompok permasalahan persamaan-persamaan serentak, yaitu:

a. Permasalahan persamaan-persamaan serentak yang memuat variabel berderajat dua atau lebih.

b. Permasalahan persamaan-persamaan serentak yang memuat eksponensial.

c. Permasalahan persamaan-persamaan serentak yang memuat logaritma.

d. Permasalahan persamaan-persamaan serentak yang memuat trigonometri.

4. Teknik Analisis Data

Data diperoleh dari hasil penyelesaian pendekatan nilai-nilai variabel dari persamaan-persamaan serentak dengan metode numerik dengan menggunakan metode Newton-Rapshon dan metode Iterasi, yang berupa banyaknya perulangan/iteraksi. Dari data yang diperoleh kemudian diolah atau dihitung rata-rata perulangan dari masing-masing metode dengan menggunakan rumus : Rata-rata perulangan : $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$, x_i adalah banyaknya perulangan masalah ke-i. Dari hasil perhitungan rata-rata perulangan dari metode Newton Rapshon dan metode Iterasi, kemudian masing-masing rata-rata perulangan ini dibandingkan dengan ketentuan, bahwa rata-rata perulangan yang terkecil menunjukkan bahwa metode tersebut yang paling baik atau efektif.

D. Pengolahan Data

1. Data Penelitian

Data diambil dari persamaan-persamaan serentak yang diselesaikan dengan menggunakan metode numerik, yaitu metode Newton Rapshon dan metode Iterasi. Persamaan-persamaan serentak dibagi menjadi 4 (empat) kelompok persamaan-persamaan serentak tersebut dengan masing-masing diselesaikan dengan ketelitian sampai 6 (enam) digit dibelakang koma adalah:

a. Permasalahan persamaan-persamaan serentak yang memuat variabel berderajat dua atau lebih.

b. Permasalahan persamaan-persamaan serentak yang memuat eksponensial.

c. Permasalahan persamaan-persamaan serentak yang memuat logaritma.

d. Permasalahan persamaan-persamaan serentak yang memuat trigonometri.

2. Penyelesaian Permasalahan Persamaan-Persamaan Serentak

a. Permasalahan persamaan-persamaan serentak yang memuat variabel berderajat dua atau lebih

1) $\begin{cases} x^2 - y^3 + 4 = 0 \\ x^3 - y^2 + 2 = 0 \end{cases}$ dengan nilai variabelnya di sekitar x = 1.0 dan y = 2.0

a) Metode Newton-Raphson

Dari permasalahan, maka diperoleh : $\begin{cases} F(x,y) = x^2 - y^3 + 4 = 0 \\ G(x,y) = x^3 - y^2 + 2 = 0 \end{cases}$

dengan $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 2x$; $\dfrac{\partial F}{\partial y} = -3y^2$; $\dfrac{\partial G}{\partial x} = 3x^2$; $\dfrac{\partial G}{\partial y} = -2y$

Sehingga : $h = \dfrac{\begin{vmatrix} -F(x,y) & -3y^2 \\ -G(x,y) & -2y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2x & -3y^2 \\ 3x^2 & -2y \end{vmatrix}}$ dan $k = \dfrac{\begin{vmatrix} 2x & -F(x,y) \\ 3x^2 & -G(x,y) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2x & -3y^2 \\ 3x^2 & -2y \end{vmatrix}}$

Dari h dan k, diperoleh x dan y yang baru dari : x = x_0 + h dan y = y_0 + h. Dengan harga awal : x_0 = 1.0 dan y_0 = 2.0, dan diperoleh : x = 0.964268 dan y = 1.701937, dengan 5 perulangan.

b) Metode Iterasi

Dari permasalahan, maka diperoleh : $\begin{cases} x = \sqrt[3]{y^2 - 2} \\ y = \sqrt[3]{x^2 + 4} \end{cases}$

Dengan harga awal : x_0 = 1.0 dan y_0 = 2.0, dan diperoleh : x = 0.964268 dan y = 1.701937, dengan 10 perulangan.

2) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ x - y^3 = -2 \end{cases}$ dengan nilai-nilai variabelnya di sekitar x = 2.0 dan y = 1.5

a) Metode Newton-Raphson

Dari permasalahan, maka diperoleh : $\begin{cases} F(x,y) = x^2 - y^2 - 1 = 0 \\ G(x,y) = x - y^3 + 2 = 0 \end{cases}$

dengan $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x$; $\frac{\partial F}{\partial y} = -2y$; $\frac{\partial G}{\partial x} = 1$; $\frac{\partial G}{\partial y} = -3y^2$

Sehingga : $h = \dfrac{\begin{vmatrix} -F(x,y) & -2y \\ -G(x,y) & -3y^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 1 & -3y^2 \end{vmatrix}}$ dan $k = \dfrac{\begin{vmatrix} 2x & -F(x,y) \\ 1 & -G(x,y) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 1 & -3y^2 \end{vmatrix}}$

Dari h dan k, diperoleh x dan y yang baru dari : x = x_0 + h dan y = y_0 + h. Dengan harga awal : x_0 = 2.0 dan y_0 = 1.5, dan diperoleh : x = 1.860333 dan y = 1.568706, dengan 4 perulangan.

b) Metode Iterasi

Dari permasalahan, maka diperoleh : $\begin{cases} x = \sqrt[2]{y^2 + 1} \\ y = \sqrt[3]{x + 2} \end{cases}$

Dengan harga awal : x_0 = 2.0 dan y_0 = 1.5, dan diperoleh : x = 1.860333 dan y = 1.568706, dengan 8 perulangan.

b. Permasalahan persamaan-persamaan serentak yang memuat eksponensial

1) $\begin{cases} x = 2 + y^2 \\ y = e^{-\frac{1}{2}x} \end{cases}$ dengan nilai-nilai variabelnya di sekitar x = 2.0 dan y = 1.0

a) Metode Newton-Raphson

Dari permasalahan, maka diperoleh : $\begin{cases} F(x,y) = x - y^2 - 2 = 0 \\ G(x,y) = y - e^{-\frac{1}{2}x} = 0 \end{cases}$

dengan $\frac{\partial F}{\partial x} = 1$; $\frac{\partial F}{\partial y} = -2y$; $\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$; $\frac{\partial G}{\partial y} = 1$

Sehingga : $h = \dfrac{\begin{vmatrix} -F(x,y) & -2y \\ -G(x,y) & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2y \\ \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} & 1 \end{vmatrix}}$ dan $k = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -F(x,y) \\ \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} & -G(x,y) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2y \\ \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} & 1 \end{vmatrix}}$

Dari h dan k, diperoleh x dan y yang baru dari : x = x_0 + h dan y = y_0 + h. Dengan harga awal : x_0 = 2.0 dan y_0 = 1.0, dan diperoleh : x = 2.120028 dan y = 0.346451, dengan 5 perulangan.

b) Metode Iterasi

Dari permasalahan, maka diperoleh : $\begin{cases} x = 2 + y^2 \\ y = e^{-\frac{1}{2}x} \end{cases}$

Dengan harga awal : x_0 = 2.0 dan y_0 = 1.0 dan diperoleh : x = 2.120028 dan y = 0.346451, dengan 7 perulangan.

2) $\begin{cases} x^2 - e^{y^2} + 2 = 0 \\ e^x - y - 4 = 0 \end{cases}$ dengan nilai variabelnya di sekitar x = 1.5 dan y = 1.5

a) Metode Newton-Raphson

Dari permasalahan, maka diperoleh : $\begin{cases} F(x,y) = x^2 - e^{y^2} + 2 = 0 \\ G(x,y) = e^x - y - 4 = 0 \end{cases}$

dengan $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 2x$; $\dfrac{\partial F}{\partial y} = -2ye^{y^2}$; $\dfrac{\partial G}{\partial x} = e^x$; $\dfrac{\partial G}{\partial y} = -1$

Sehingga : $h = \dfrac{\begin{vmatrix} -F(x,y) & -2ye^{y^2} \\ -G(x,y) & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2x & -2ye^{y^2} \\ e^x & -1 \end{vmatrix}}$ dan $k = \dfrac{\begin{vmatrix} 2x & -F(x,y) \\ e^x & -G(x,y) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2x & -2ye^{y^2} \\ e^x & -1 \end{vmatrix}}$

Dari h dan k, diperoleh x dan y yang baru dari : x = x_0 + h dan y = y_0 + h. Dengan harga awal : x_0 = 1.5 dan y_0 = 1.5, dan diperoleh : x = 1.657873 dan y = 1.248134, dengan 6 perulangan.

b) Metode Iterasi

Dari permasalahan, maka diperoleh : $\begin{cases} x = \ln(y+4) \\ y = \sqrt[2]{\ln(x^2+2)} \end{cases}$

Dengan harga awal : x_0 = 1.5 dan y_0 = 1.5, dan diperoleh : x = 1.657873 dan y = 1.248134, dengan 6 perulangan.

c. Permasalahan persamaan-persamaan serentak yang memuat logaritma

1) $\begin{cases} x^2 - 2\log y - 2 = 0 \\ y^2 - 4\log x - 4 = 0 \end{cases}$ dengan nilai variabelnya di sekitar x = 2.0 dan y = 2.0

a) Metode Newton-Raphson

Dari permasalahan, maka diperoleh : $\begin{cases} F(x,y) = x^2 - 2\log y - 2 = 0 \\ G(x,y) = y^2 - 4\log x - 4 = 0 \end{cases}$

dengan $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 2x$; $\dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{-2}{y\ln 10}$; $\dfrac{\partial G}{\partial x} = \dfrac{-4}{x\ln 10}$; $\dfrac{\partial G}{\partial y} = 2y$

Sehingga : $h = \dfrac{\begin{vmatrix} -F(x,y) & \dfrac{-2}{y\ln 10} \\ -G(x,y) & 2y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2x & \dfrac{-2}{y\ln 10} \\ \dfrac{-4}{x\ln 10} & 2y \end{vmatrix}}$ dan $k = \dfrac{\begin{vmatrix} 2x & -F(x,y) \\ \dfrac{-4}{x\ln 10} & -G(x,y) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2x & \dfrac{-2}{y\ln 10} \\ \dfrac{-4}{x\ln 10} & 2y \end{vmatrix}}$

Dari h dan k, diperoleh x dan y yang baru dari : x = x_0 + h dan y = y_0 + h. Dengan harga awal : x_0 = 2.0 dan y_0 = 2.0, dan diperoleh : x = 1.639052 dan y = 2.204171, dengan 4 perulangan.

b) Metode Iterasi

Dari permasalahan, maka diperoleh : $\begin{cases} x = \sqrt[2]{2 + 2\log y} \\ y = \sqrt[2]{4 + 4\log x} \end{cases}$

Dengan harga awal : x_0 = 2.0 dan y_0 = 2.0, dan diperoleh : x = 1.639052 dan y = 2.204171, dengan 5 perulangan.

2) $\begin{cases} x^2 + \log y - 4 = 0 \\ y - \log x^2 - 1 = 0 \end{cases}$ dengan nilai variabelnya di sekitar x = 2.0 dan y = 1.5

a) Metode Newton-Raphson

Dari permasalahan, maka diperoleh : $\begin{cases} F(x,y) = x^2 + \log y - 4 = 0 \\ G(x,y) = y - \log x^2 - 1 = 0 \end{cases}$

dengan $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 2x$; $\dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{1}{y\ln 10}$; $\dfrac{\partial G}{\partial x} = \dfrac{-2x}{x^2 \ln 10}$; $\dfrac{\partial G}{\partial y} = 1$

Sehingga : $h = \dfrac{\begin{vmatrix} -F(x,y) & \dfrac{1}{x\ln 10} \\ -G(x,y) & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2x & \dfrac{1}{x\ln 10} \\ \dfrac{-2x}{x^2\ln 10} & 1 \end{vmatrix}}$ dan $k = \dfrac{\begin{vmatrix} 2x & -F(x,y) \\ \dfrac{-2x}{x^2\ln 10} & -G(x,y) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2x & \dfrac{1}{x\ln 10} \\ \dfrac{-2x}{x^2\ln 10} & 1 \end{vmatrix}}$

Dari h dan k, diperoleh x dan y yang baru dari : x = x_0 + h dan y = y_0 + h. Dengan harga awal : x_0 = 2.0 dan y_0 = 1.5, dan diperoleh : x = 1.949708 dan y = 1.579939, dengan 3 perulangan.

b) Metode Iterasi

Dari permasalahan, maka diperoleh : $\begin{cases} x = \sqrt[2]{4 - \log y} \\ y = \log x^2 + 1 \end{cases}$

Dengan harga awal : x_0 = 2.0 dan y_0 = 1.5, dan diperoleh : x = 1.949708 dan y = 1.579939, dengan 5 perulangan.

d. Permasalahan persamaan-persamaan serentak yang memuat trigonometri

1) $\begin{cases} \cos^2 x + y^3 - 1 = 0 \\ x^2 - \sin^3 y - 3 = 0 \end{cases}$ dengan nilai variabelnya di sekitar x = 2.0 dan y = 1.0

a) Metode Newton-Raphson

Dari permasalahan, maka diperoleh : $\begin{cases} F(x,y) = \cos^2 x + y^3 - 1 = 0 \\ G(x,y) = x^2 - \sin^3 y - 3 = 0 \end{cases}$

dengan $\frac{\partial F}{\partial x} = -2\sin x \cos x$; $\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2$; $\frac{\partial G}{\partial x} = 2x$; $\frac{\partial G}{\partial y} = -3\cos y \sin^2 y$

Sehingga :

$$h = \frac{\begin{vmatrix} -F(x,y) & 3y^2 \\ -G(x,y) & -3\cos y \sin^2 y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2\sin x \cos x & 3y^2 \\ 2x & -3\cos y \sin^2 y \end{vmatrix}} \text{ dan } k = \frac{\begin{vmatrix} 2\sin x \cos x & -F(x,y) \\ 2x & -G(x,y) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2\sin x \cos x & 3y^2 \\ 2x & -3\cos y \sin^2 y \end{vmatrix}}$$

Dari h dan k, diperoleh x dan y yang baru dari : x = x_0 + h dan y = y_0 + h. Dengan harga awal : x_0 = 2.0 dan y_0 = 1.0, dan diperoleh : x = 1.732051 dan y = 0.097050, dengan 9 perulangan.

b) Metode Iterasi

Dari permasalahan, maka diperoleh : $\begin{cases} x = \sqrt[2]{\sin^3 y + 3} \\ y = \sqrt[3]{1 - \cos^2 x} \end{cases}$

Dengan harga awal : x_0 = 2.0 dan y_0 = 1.0, dan diperoleh : x = 1.732051 dan y = 0.097032, dengan 2 perulangan.

2) $\begin{cases} x^2 + \cos^3 y - 2 = 0 \\ -\sin^2 x - y^3 + 2 = 0 \end{cases}$ dengan nilai variabelnya di sekitar x = 1.0 dan y = 1.0

a) Metode Newton-Raphson

Dari permasalahan, maka diperoleh : $\begin{cases} F(x,y) = x^2 + \cos^3 y - 2 = 0 \\ G(x,y) = -\sin^2 x - y^3 + 2 = 0 \end{cases}$

dengan $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x$; $\frac{\partial F}{\partial y} = -3\sin y \cos^2 y$; $\frac{\partial G}{\partial x} = -2\cos x \sin x$; $\frac{\partial G}{\partial y} = -3y^2$

Sehingga :

$$h = \frac{\begin{vmatrix} -F(x,y) & -3\sin y\cos^2 y \\ -G(x,y) & -3y^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2x & -3\sin y\cos^2 y \\ -2\cos x\sin x & -3y^2 \end{vmatrix}} \text{ dan } k = \frac{\begin{vmatrix} 2x & -F(x,y) \\ -2\cos x\sin x & -G(x,y) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2x & -3\sin y\cos^2 y \\ -2\cos x\sin x & -3y^2 \end{vmatrix}}$$

Dari h dan k, diperoleh x dan y yang baru dari : $x = x_0 + h$ dan $y = y_0 + h$. Dengan harga awal : $x_0 = 1.0$ dan $y_0 = 1.0$, dan diperoleh : x = 1.000362 dan y = 1.259857, dengan 6 perulangan.

b) Metode Iterasi

Dari permasalahan, maka diperoleh : $\begin{cases} x = \sqrt[2]{2 - \cos^3 y} \\ y = \sqrt[3]{2 - \sin^2 x} \end{cases}$

Dengan harga awal : $x_0 = 1.0$ dan $y_0 = 1.0$, dan diperoleh : x = 1.000362 dan y = 1.259857, dengan 2 perulangan.

3. Deskripsi Data

Berdasarkan penyelesaian permasalahan di atas dapat dideskriptifkan sebagai berikut:

Metode	**Jumlah Perulangan pada Permasalahan**								**Rata-rata**
	1)		**2)**		**3)**		**4)**		
	a)	**b)**	**a)**	**b)**	**a)**	**b)**	**a)**	**b)**	
Newton-Rapshon	5	4	5	6	4	3	9	6	5.250
Metode Iterasi	10	8	7	6	5	5	2	2	5.625

E. Analisis Hasil Penelitian

Telah dipaparkan penyelesaian dalam menentukan pendekatan nilai-nilai variabel dari persamaan-persamaan serentak dengan menggunakan metode numerik. Dari metode numerik tersebut digunakan untuk menentukan pendekatan nilai-nilai variabel dari persamaan-persamaan serentak dengan bantuan komputer, yaitu bahasa pemrograman Pascal. Masalah perbandingan penyelesaian dengan metode numerik dalam menentukan pendekatan nilai-nilai variabel dari persamaan-persamaan serentak telah berakhir dengan selesainya seluruh langkah-langkah dalam perulangan-perulangan.

Metode numerik yang paling baik dengan koefisien variasi perulangan terkecil dengan perulangan dan nilai fungsi yang lebih cepat mendekati nol atau batas fungsi yang telah ditentukan sebesar 0.000001, telah ditemukan. Berikut akan diuraikan rata-rata perulangan masing-masing persamaan-persamaan dari masing-masing metode :

1. Permasalahan persamaan-persamaan serentak yang memuat variabel berderajat dua atau lebih, diperoleh rata-rata perulangan dalam menentukan pendekatan nilai-nilai variabel dari persamaan-persamaan serentak yang memuat variabel berderajat dua atau lebih adalah:

   a. Metode Newton-Rapshon mempunyai rata-rata perulangan 4.5 perulangan.

   b. Metode Iterasi mempunyai rata-rata perulangan 9.0 perulangan.

   Jadi metode numerik yang paling baik atau efisien yang digunakan untuk menentukan pendekatan nilai-nilai variabel dari persamaan-persamaan serentak yang memuat variabel berderajat dua atau lebih adalah metode Newton-Rapshon, karena rata-rata perulangan metode Newton-Rapshon (= 4.5 perulangan) lebih kecil daripada rata-rata perulangan metode Iterasi (= 9.0 perulangan).

2. Permasalahan persamaan-persamaan serentak yang memuat eksponensial, diperoleh rata-rata perulangan dalam menentukan pendekatan nilai-nilai variabel dari persamaan-persamaan serentak yang memuat eksponensial adalah:
   a. Metode Newton-Rapshon mempunyai rata-rata perulangan 5.5 perulangan.
   b. Metode Iterasi mempunyai rata-rata perulangan 6.5 perulangan.

   Jadi metode numerik yang paling baik atau efisien yang digunakan untuk menentukan pendekatan nilai-nilai variabel dari persamaan-persamaan serentak yang memuat eksponensial adalah metode Newton-Rapshon, karena rata-rata perulangan metode Newton-Rapshon (= 5.5 perulangan) lebih kecil daripada rata-rata perulangan metode Iterasi (= 6.5 perulangan).
3. Permasalahan persamaan-persamaan serentak yang memuat logaritma, diperoleh rata-rata perulangan dalam menentukan pendekatan nilai-nilai variabel dari persamaan-persamaan serentak yang memuat logaritma adalah:
   a. Metode Newton-Rapshon mempunyai rata-rata perulangan 3.5 perulangan.
   b. Metode Iterasi mempunyai rata-rata perulangan 5.0 perulangan.

   Jadi metode numerik yang paling baik atau efisien yang digunakan untuk menentukan pendekatan nilai-nilai variabel dari persamaan-persamaan serentak yang memuat logaritma adalah metode Newton-Rapshon, karena rata-rata perulangan metode Newton-Rapshon (= 3.5 perulangan) lebih kecil daripada rata-rata perulangan metode Iterasi (= 5.0 perulangan).
4. Permasalahan persamaan-persamaan serentak yang memuat trigonometri, diperoleh rata-rata perulangan dalam menentukan pendekatan nilai-nilai

variabel dari persamaan-persamaan serentak yang memuat trigonometri adalah:

a. Metode Newton-Rapshon mempunyai rata-rata perulangan 7.5 perulangan.

b. Metode Iterasi mempunyai rata-rata perulangan 2.0 perulangan.

Jadi metode numerik yang paling baik atau efisien yang digunakan untuk menentukan pendekatan nilai-nilai variabel dari persamaan-persamaan serentak yang memuat trigonometri adalah metode Iterasi, karena rata-rata perulangan metode Iterasi (= 2.0 perulangan) lebih kecil daripada rata-rata perulangan metode Newton-Rapshon (= 7.5 perulangan).

Dari permasalahan persamaan-persamaan serentak di atas, secara keseluruhan diperoleh, bahwa metode Newton-Rapshon mempunyai rata-rata perulangan 5.25 perulangan, sedangkan Metode Iterasi mempunyai rata-rata perulangan 5.625 perulangan. Jadi metode numerik yang paling baik atau efisien yang digunakan untuk menentukan pendekatan nilai-nilai variabel dari persamaan-persamaan serentak adalah metode Newton-Rapshon.

F. Kesimpulan dan Saran

1. Kesimpulan

Dari hasil penelitian ini, kesimpulan yang dapat dikemukakan adalah metode Newton-Rapshon dan metode Iterasi setelah digunakan untuk menentukan pendekatan nilai-nilai variabel dari persamaan-persamaan serentak diperoleh:

a. Metode Newton-Rapshon mempunyai rata-rata perulangan 5.25 perulangan.

b. Metode Iterasi mempunyai rata-rata perulangan 5.625 perulangan.

c. Metode yang paling baik atau paling efisien digunakan dalam menentukan pendekatan nilai-nilai variabel dari persamaan-persamaan serentak adalah metode Newton-Rapshon.

2. Saran

Berdasarkan penelitian pada metode numerik, yaitu metode Newton-Raphson dan metode Iterasi, dalam menentukan pendekatan nilai-nilai variabel dari persamaan-persamaan serentak yang dapat disarankan adalah :

a. Dalam menentukan metode numerik yang digunakan untuk menentukan pendekatan nilai-nilai variabel dari persamaan-persamaan serentak, sebaiknya menggunakan metode Newton-Rapshon. Tetapi untuk menentukan pendekatan nilai-nilai variabel dari persamaan-persamaan serentak yang memuat trigonometri, sebaiknya menggunakan metode Iterasi.

b. Sebelum menentukan pendekatan nilai-nilai variabel dari persamaan-persamaan serentak sebaiknya terlebih dahulu ditentukan batas ketelitian dari persamaan-persamaan serentak tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

Arikunto, Suharsimi.1983. *Prosedur Penelitian Suatu Pendekatan Praktis*. Jakarta:Bina Aksara.

Conte, Samuel D., dan De Boor, Carl. 1992. *Dasar-dasar Analisis Numerik Suatu Pendekatan Algoritma*. Jakarta:Erlangga.

Djojodihardjo, Harijono. 2000. *Metode Numerik*. Jakarta:Gramedia.

IKIP Malang. 1996. *Pedoman Penulisan Karya Ilmiah*. Malang:IKIP Malang.

Jogiyanto. 1986. *Teori dan Aplikasi Program Komputer Bahasa Pascal*. Yogjakarta:Andi Offset.

Jogiyanto. 1988. *Turbo Pascal*. Jilid 1 dan 2. Yogjakarta:Andi Offset.

Narbuko, Cholid. 1999. *Metode Penelitian*. Jakarta:Bima Aksara.

Soehardjo. 1985. *Analisis Numerik*. Surabaya:ITATS.

Triatmojo, Bambang. 1992. *Metode Numerik*. Yogjakarta:Peta Offset.

Wahyudi. 1987. *Metode Analisis Numerik*. Bandung:Trasito.